Μεθοδολογίες (Αρχικές ή Παράγουσες - Αόριστο Ολοκλήρωμα)

Η παράγραφος 3.1, πραγματεύεται την έννοια της Αρχικής Συνάρτησης (ή παράγουσας) και του Αόριστου Ολοκληρώματος

1. Ορισμός και Γενική Μορφή

Ορισμός:
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
Θεώρημα Γενικής Μορφής:
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο διάστημα Δ, τότε:
Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ. Κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει υποχρεωτικά αυτή τη μορφή. Το σύνολο όλων αυτών των παραγουσών ονομάζεται Αόριστο Ολοκλήρωμα και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$.

2. Πίνακας Βασικών Αρχικών

Οι βασικοί τύποι προκύπτουν άμεσα από την αντιστροφή των κανόνων παραγώγισης:

Συνάρτηση $f(x)$	**Παράγουσα** $G(x) = F(x) + c$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$
e^x	$e^x + c$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x + c$
$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x + c$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\epsilon\phi x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$

3. Μεθοδολογία Επίλυσης

- Η αρχική συνάρτηση ενός αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των αρχικών, και ο σταθερός πολλαπλασιαστής παραμένει ως έχει:
  $\int(f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$
- Εύρεση της Σταθεράς c (Αρχική Συνθήκη)
  Όταν δίνεται ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της αρχικής συνάρτησης, η σταθερά c προσδιορίζεται λύνοντας την εξίσωση $F(x_0) = y_0$.
- Αντίστροφη Κανόνων Γινομένου/Πηλίκου Αναγνωρίζουμε μορφές που προέρχονται από παραγώγιση σύνθετων εκφράσεων:
  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'$

  $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$

  $f'(g(x))g'(x) = (f(g(x)))'$
- Μορφή $f(ax+\beta)$ Αν F είναι αρχική της f,
  τότε η αρχική της $f(ax+\beta)$ είναι η $\frac{1}{a}F(ax+\beta)+c$.
- Χρήση Ιδιοτήτων (Γραμμικότητα)

4. Παραδείγματα Εφαρμογής

Παράδειγμα 1:
Προσδιορισμός σταθεράς c Να βρεθεί η αρχική της $f(x) = 2x - 1$ που διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$.
Λύση:
Οι παράγουσες είναι $F(x) = x^2 - x + c$. Εφόσον διέρχεται από το $A(2, 3)$,
ισχύει $F(2) = 3 \Rightarrow 2^2 - 2 + c = 3 \Rightarrow 2 + c = 3 \Rightarrow c = 1$. Άρα, $F(x) = x^2 - x + 1$.
Παράδειγμα 2:
Χρήση γραμμικότητας Να βρεθούν οι παράγουσες της $f(x) = e^x + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{x}$ για $x > 0$.
Λύση:
$F(x) = e^x + \eta\mu x + \ln x + c$.
Παράδειγμα 3:
Σύνθετη μορφή (Λογάριθμος) Να βρεθεί η αρχική της $f(x) = \epsilon\phi x$ στο διάστημα $(0, \pi/2)$.
Λύση:
Γράφουμε $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}$. Η μορφή $\frac{g'(x)}{g(x)}$ έχει αρχική την $\ln|g(x)|$.
Άρα, $F(x) = -\ln(\sigma\upsilon\nu x) + c$ (επειδή στο διάστημα αυτό το $\sigma\upsilon\nu x > 0$).
Παράδειγμα 4:
Συνάρτηση πολλαπλού τύπου Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x) = 2|x| + 1$. Να βρεθούν οι αρχικές της.
Λύση:

Για $x \geq 0, f(x) = 2x + 1$, άρα $F(x) = x^2 + x + c_1$.
Για $x < 0, f(x) = -2x + 1$, άρα $F(x) = -x^2 + x + c_2$.
Λόγω της συνέχειας της F στο 0, πρέπει $lim_{x \to 0^-} F(x) = lim_{x \to 0^+} F(x) \Rightarrow c_1 = c_2 = c$.
Άρα $F(x) = \begin{cases} x^2 + x + c & x \geq 0 \\ -x^2 + x + c & x < 0 \end{cases}$.