

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης (Ορισμένο Ολοκλήρωμα)

1. Παραγοντική Ολοκλήρωση (Integration by Parts)

Η μέθοδος χρησιμοποιείται όταν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx$$

Βασικές μορφές εφαρμογής:

- $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)e^{kx} dx$: Επιλέγουμε ως $g'(x)$ την εκθετική.
- $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \sin(\alpha x) dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cos(\alpha x) dx$: Επιλέγουμε ως $g'(x)$ την τριγωνομετρική.
- $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \ln(\alpha x) dx$: Επιλέγουμε ως $f(x)$ τον λογάριθμο.
- **Κυκλικά ολοκληρώματα:** Μορφές $\int e^{ax} \sin(bx) dx$ όπου εφαρμόζουμε δύο φορές τη μέθοδο.

2. Μέθοδος Αντικατάστασης (Substitution Method)

Χρησιμοποιείται για ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x) dx$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

Βήματα:

- Θέτουμε $u = g(x)$, οπότε $du = g'(x)dx$.
- **Αλλαγή άκρων:** Τα νέα άκρα είναι $u_1 = g(\alpha)$ και $u_2 = g(\beta)$.

3. Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων

Αφορούν συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

- **Βαθμός αριθμητή i βαθμός παρονομαστή:** Ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \rho_1} + \frac{B}{x - \rho_2} + \dots$$

- **Βαθμός αριθμητή \geq βαθμός παρονομαστή:** Εκτελούμε πρώτα την Ευκλείδεια διαίρεση $P(x) = Q(x)\pi(x) + v(x)$.

4. Ολοκληρώματα Άρρητων Συναρτήσεων

- Για μορφές με $\sqrt[n]{\alpha x + \beta}$: Θέτουμε $u = \sqrt[n]{\alpha x + \beta}$, οπότε $u^n = \alpha x + \beta$.
- Για πολλαπλά ριζικά $\sqrt[m]{\dots}, \sqrt[n]{\dots}$: Θέτουμε $u = \sqrt[n]{\alpha x + \beta}$ όπου $\nu = \text{Ε.Κ.Π.}(\nu_1, \nu_2)$.

5. Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

- **Περιττή δύναμη $\sin x$ ή $\cos x$** : Αν το $\sin x$ είναι σε περιττή δύναμη, θέτουμε $u = \cos x$.
- **Άρτια δύναμη**: Χρήση τύπων αποτετραγωνισμού:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

- **Γενική αντικατάσταση**: $u = \tan(x/2)$ για συναρτήσεις των $\sin x, \cos x$.

6. Ειδικές Περιπτώσεις

- **Άρτια συνάρτηση στο $[-\alpha, \alpha]$** : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$.
- **Περιττή συνάρτηση στο $[-\alpha, \alpha]$** : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$.
- **Αντικατάσταση $x = \alpha + \beta - u$** : Χρήσιμη σε ολοκληρώματα με συμμετρικά άκρα.
- **Αντίστροφη συνάρτηση**: $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} u f'(u) du$.