ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ & ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

I. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

1. Εύρεση όλων των ασυμπτώτων μιας συνάρτησης f
   Μεθοδολογία:
   Αναζητούμε κατακόρυφες στα άκρα του πεδίου ορισμού όπου η f δεν ορίζεται ή δεν είναι συνεχής.. Αναζητούμε οριζόντιες στο $+\infty$ και $-\infty$ υπολογίζοντας το $lim_{x\to\pm\infty}f(x)$. Αναζητούμε πλάγιες ($y = \lambda x + \beta$) αν δεν υπάρχουν οριζόντιες, με τους τύπους $\lambda = lim\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = lim(f(x) - \lambda x)$.
   Παράδειγμα:
   Για την $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη επειδή $lim_{x\to 1^-}f(x) = -\infty$, και η $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ επειδή $lim_{x\to\pm\infty}f(x) = 2$.

2. Απόδειξη πλάγιας ασύμπτωτης με τον ορισμό
   Μεθοδολογία:
   Αρκεί να αποδείξουμε ότι $lim_{x\to\pm\infty}f(x) - (\lambda x + \beta) = 0$.
   Παράδειγμα:
   Για την $f(x) = x + \frac{\eta\mu x}{e^x}$, η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$ διότι $lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{e^x} = 0$ (με κριτήριο παρεμβολής).

3. Προσδιορισμός παραμέτρων
   Μεθοδολογία:
   Χρησιμοποιούμε τις δοθείσες ασύμπτωτες για να δημιουργήσουμε σύστημα εξισώσεων με βάση τα όρια λ και β ή τις ρίζες του παρονομαστή.
   Παράδειγμα:
   Έστω $f(x) = \frac{\alpha x^2+\beta x+7}{x+\gamma}$. Αν η $x = 1$ είναι κατακόρυφη, τότε $1 + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -1$. Αν η $y = 2x + 3$ είναι πλάγια στο $+\infty$, τότε $lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \alpha = 2$ και $lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = \beta + 2 = 3 \Rightarrow \beta = 1$.

4. Εύρεση ορίων ή παραμέτρων μέσω γνωστής ασύμπτωτης
   Μεθοδολογία:
   Αν η $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη, αντικαθιστούμε στα ζητούμενα όρια τις σχέσεις $lim\frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $lim(f(x) - \lambda x) = \beta$.
   Παράδειγμα:
   Αν η $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$, τότε το $lim_{x\to-\infty}\frac{xf(x)-2x^2+\lambda x-1}{\lambda f(x)-4x+5} = 1$ οδηγεί στην εξίσωση $\frac{-3+\lambda}{2\lambda-4} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

II. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟΥΣ ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

1. Άμεσος υπολογισμός ορίων μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$
   Μεθοδολογία:
   Εφαρμόζουμε τον κανόνα $lim\frac{f(x)}{g(x)} = lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$, εφόσον ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις (συνέχεια, παραγωγισιμότητα, ύπαρξη ορίου παραγώγων).
   Παράδειγμα:
   $lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sigma\upsilon\nu x}{ln(x+1)} = lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\sigma\upsilon\nu x)'}{(ln(x+1))'} = lim_{x\to 0}\frac{e^x+\eta\mu x}{\frac{1}{x+1}} = 1.$

2. Απροσδιόριστη μορφή $0\cdot\infty$
   Μεθοδολογία:
   Μετασχηματίζουμε το γινόμενο $f\cdot g$ σε πηλίκο $\frac{f}{1/g}$ ή $\frac{g}{1/f}$ για να καταλήξουμε σε μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$.
   Παράδειγμα:
   $lim_{x\to 0^+}(x\cdot lnx) = lim_{x\to 0^+}\frac{lnx}{1/x} = lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$

3. Απροσδιόριστες μορφές $0^0, 1^\infty, \infty^0$
   Μεθοδολογία: Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $f^g = e^{g\cdot lnf}$ και υπολογίζουμε το όριο του εκθέτη (που είναι μορφής $0\cdot\infty$).
   Παράδειγμα:
   Για το $lim_{x\to 0^+}x^{\eta\mu x}$, υπολογίζουμε το $lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x\cdot lnx)$. Αυτό μετατρέπεται σε $lim_{x\to 0^+}\frac{lnx}{1/\eta\mu x} = ... = 0$. Άρα το αρχικό όριο είναι $e^0 = 1$.

4. Απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$
   Μεθοδολογία:
   Αν είναι διαφορά κλασμάτων, κάνουμε ομώνυμα. Αν είναι διαφορά συναρτήσεων, βγάζουμε κοινό παράγοντα ή χρησιμοποιούμε λογαριθμικές ιδιότητες.
   Παράδειγμα:
   $lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{ln(x+1)} - \frac{1}{x}) = lim_{x\to 0^+}\frac{x-ln(x+1)}{x\cdot ln(x+1)}$. Με DLH μορφής $\frac{0}{0}$ δύο φορές, το όριο ισούται με $1/2$.

5. Σύνθετες εφαρμογές (Συναρτήσεις & Όρια)
   Μεθοδολογία:
   Υπολογισμός ορίων όπου η f ορίζεται με ολοκλήρωμα ή ικανοποιεί συναρτησιακή σχέση.
   Παράδειγμα:
   Υπολογισμός του $lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x)$, χρησιμοποιώντας DLH ως προς h.
   Σημείωση:
   Οι κανόνες De L' Hospital δεν αποτελούν πάντα τη βέλτιστη λύση, ειδικά όταν οδηγούν σε υπερβολικά πολύπλοκες παραγώγους ή σε κυκλικά όρια.