

Άσκηση 1: Μελέτη Συνάρτησης και Πλάγια Ασύμπτωτη

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.
3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Άσκηση 2: Απροσδιόριστη Μορφή $\infty - \infty$ και Ασύμπτωτες

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

1. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
2. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Άσκηση 3: Προσδιορισμός Παραμέτρων μέσω Ασυμπτώτων

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x + \gamma}$.

1. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .
2. Η ευθεία $y = 2x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Άσκηση 4: Εκθετικές Μορφές και Κανόνες DLH

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$. (Υπόδειξη)

- Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $f^g = e^{g \ln f}$.
- Να υπολογίσετε το όριο του εκθέτη $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x \cdot \ln x)$ με μετατροπή σε μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ και εφαρμογή De l' Hospital.

Άσκηση 5: Σύνθετη Άσκηση με Παραγώγους και Ασύμπτωτες

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{\ln(x+1)}$.

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$.
2. Να αναζητήσετε κατακόρυφες ασύμπτωτες στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

Άσκηση 6: Διαφορά Κλασμάτων και Μορφή 0/0

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$. (Υπόδειξη)

- Να μετατρέψετε τη διαφορά σε ομώνυμα κλάσματα.
- Να εφαρμόσετε διαδοχικά τον κανόνα De l' Hospital (μορφής 0/0) δύο φορές για να δείξετε ότι το όριο ισούται με $1/2$.

Άσκηση 7: Εύρεση Ορίων μέσω Γνωστής Ασύμπτωτης

Αν η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ από τη σχέση:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x^2 + \lambda x - 1}{\lambda f(x) - 4x + 5} = 1. (\text{Υπόδειξη})$$

- Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$.

Άσκηση 8: Μελέτη Κυρτότητας και Οριζόντια Ασύμπτωτη

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Άσκηση 9: Τριγωνομετρικά Όρια και DLH

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x-1)^2}$. (Υπόδειξη)

- Διαπιστώστε την απροσδιόριστη μορφή 0/0.
- Εφαρμόστε τον κανόνα De l' Hospital δύο φορές για τον τελικό υπολογισμό.

Άσκηση 10: Απόδειξη Ασύμπτωτης με τον Ορισμό

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{\sin x}{e^x}$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. (Υπόδειξη)

- Δείχνοντας ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.
- Για την απόδειξη του ορίου, χρησιμοποιήστε το κριτήριο παρεμβολής.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 7}{x + \gamma}$.

Αν η γραφική παράσταση C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$ και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x + 3$, να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β, γ .

Άσκηση 12

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $f(x) - g(x) = x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της C_f καθώς το $x \rightarrow +\infty$:

1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu(2x)}{xf(x) - 3x^2 + 1}$.

Άσκηση 13

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha e^{2x} + \beta x + \gamma}{(x-1)^2} = 2.$$

Άσκηση 14

Να υπολογίσετε το απροσδιόριστο όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Άσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + 4x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια όλες τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης.

Άσκηση 16

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x + x\eta\mu\frac{1}{x}$.

Αν η ευθεία $y = 2x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να προσδιορίσετε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

Άσκηση 17

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x}{e^x - e^{-x} - 2\eta\mu x}$.

Άσκηση 18

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ δέχεται πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Αν ναι, να βρείτε την εξίσωσή της και να μελετήσετε τη σχετική θέση της C_f με αυτήν την ασύμπτωτη.

Άσκηση 19

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Άσκηση 20

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x - 3$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)(x-1) - 5x^2}{x\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x^2 + \eta\mu x}.$$