

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη
 $\varepsilon: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$
στο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$

Με εφαρμογή του Θ. Rolle προκύπτει ότι:

1. Αν η f έχει δύο ρίζες, τότε η f' έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα.
2. Αν η f έχει τρεις ρίζες, τότε η f' έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες και η f'' μία, τουλάχιστον, ρίζα.

Δηλαδή:

Αν ισχύει $f'(x) \neq 0$, $x \in \Delta$, τότε η f είναι 1-1.

Οπότε:

- Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, το πολύ, ρίζα
- Η f αντιστρέφεται

[Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής, τότε η f' θα διατηρεί σταθερό πρόσημο].

Υπαρξη σημείου $M(\xi, f(\xi))$ της Cf , ώστε η εφαπτομένη της Cf
στο M να διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$

Σχέση πλήθους ριζών των f και f'

Αν $f'(x) \neq 0 \Rightarrow f: 1-1$

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE (2)

Συμπέρασμα

Προσδιορισμός παραμέτρων, ώστε να ισχύει το Θ. Rolle

Σχόλιο

Αν θέλουμε να βρούμε τις παραμέτρους μίας συνάρτησης f , που ο τύπος της έχει δύο κλάδους, ώστε να εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$, απαιτούμε:

- $f(a) = f(\beta)$
- Η f να είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, οπότε και στο σημείο x_0 που αλλάζει τύπο
- Η f να είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) , οπότε και στο σημείο x_0 αλλαγής του τύπου της.

Από τις σχέσεις που προκύπτουν από τα παραπάνω βήματα βρίσκουμε τις παραμέτρους.

Υπαρξη ρίζας - Πλήθος ριζών εξίσωσης

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει:

► **Τουλάχιστον, μία ρίζα στο (a, β)** , τότε:

1. Βρίσκουμε προφανή ρίζα της f , αν υπάρχει, ή
2. Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano, για την f στο $[a, \beta]$ ή
3. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f και το 0 να ανήκει σε αυτό ή
4. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για μία παράγουσα F της f .

► **Το πολύ, μία ρίζα στο (a, β)** , τότε:

- Βρίσκουμε τη μονοτονία της f
- Αν έχουμε $f'(x) \neq 0$, $x \in (a, \beta)$, τότε υποθέτουμε ότι η f έχει δύο ρίζες και καταλήγουμε σε άτοπο.

► **Ακριβώς, μία ρίζα στο (a, β)** , τότε:

αρκεί να δείξουμε ότι έχει τουλάχιστον μία, και το πολύ, μία ρίζα, με κατάλληλο συνδυασμό των δύο προηγούμενων περιπτώσεων.

► **Ακριβώς, δύο ρίζες τις x_1 και x_2** , τότε υποθέτουμε ότι έχει και τρίτη ρίζα και καταλήγουμε σε άτοπο, εφαρμόζοντας το Θ. Rolle.

$f'(x) \neq 0 \implies f$ έχει μία, το πολύ, ρίζα

- Αν $f'(x) \neq 0$, $x \in \Delta$, τότε η f έχει μία, το πολύ, ρίζα στο Δ .
- Αν $f''(x) \neq 0$, $x \in \Delta$, τότε η f' έχει μία, το πολύ, ρίζα στο Δ και η f έχει δύο, το πολύ, ρίζες στο Δ .

Οι αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων γίνονται με τη μέθοδο απαγωγής σε άτοπο, εφαρμόζοντας το Θ. Rolle.

Δηλαδή για να δείξουμε ότι η f έχει n , το πολύ, ρίζες, υποθέτουμε ότι έχει $n+1$ ρίζες και με διαδοχικές εφαρμογές του Θ. Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.