

Η λύση πολλών προβλημάτων απαιτεί διαδικασία αντίστροφης παραγωγής. Πιο συγκεκριμένα πολλές φορές μας δίνεται μια συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μία παραγωγίσιμη συνάρτηση F , που η παράγωγός της να δίνει την f . Δηλαδή, να ισχύει $f(x) = F'(x)$ σε ένα διάστημα Δ .

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αντιπαραγωγή και η συνάρτηση F **παράγουσα**, ή **αρχική** της f στο Δ .

Για να βρούμε μία αρχική συνάρτηση χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ιδιότητες:

$\bullet \ x^a = \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)', \ a+1 \neq 0$	$\bullet \ \frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$
$\bullet \ \eta \mu x = (-\sigma \nu x)'$	$\bullet \ \sigma \nu x = (\eta \mu x)'$
$\bullet \ e^x = (e^x)'$	$\bullet \ \frac{1}{x} = (\ln x)', \ x > 0$

$\bullet \ f'(x) + g'(x) = (f(x) + g(x))'$	$\bullet \ f'(x) - g'(x) = (f(x) - g(x))'$
$\bullet \ f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))'$	$\bullet \ c f'(x) = (c f(x))'$
$\bullet \ \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$\bullet \ -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(\frac{1}{f(x)}\right)'$
$\bullet \ 2f(x) \cdot f'(x) = (f^2(x))'$	$\bullet \ \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (\sqrt{f(x)})'$
$\bullet \ e^{f(x)} f'(x) = (e^{f(x)})'$	$\bullet \ \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))', \ f(x) > 0$

Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Rolle

- Γεωμετρικά, η ύπαρξη του $\xi \in (a, \beta)$ σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον άξονα των x .

Αντιπαραγωγή - Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση

Εύρεση Αρχικής συνάρτησης

Υποθέσεις - Συμπέρασμα του Θ. Rolle

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE (1)

Εύρεση παράγουσας g από σχέση $g(a) = g(\beta)$
για εφαρμογή του Θ. Rolle

Σχόλιο στο συμπέρασμα του Θ. Rolle

Υπαρξη ρίζας της $f(x) = 0$ με εφαρμογή του Θ. Rolle σε Αρχική της f

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, ώστε να ισχύει μία ιδιότητα που περιέχει το ξ , τότε:

- Θέτουμε στη θέση του ξ το x και μετά από πράξεις καταλήγουμε σε μία εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$.
- Αν δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano για την f στο $[a, \beta]$, τότε βρίσκουμε μία **αρχική** ή **παράγουσα** συνάρτηση F της f , στο $[a, \beta]$ και εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη συνάρτηση F στο $[a, \beta]$.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[a, \beta]$, τότε ισχύουν οι ισοδύναμες προτάσεις:

- Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο (a, β) .
- Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.
- Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $\xi \in (a, \beta)$.

Αν δίνεται μία ιδιότητα $f_1(a, \beta) = f_2(a, \beta)$, τότε τη μετασχηματίζουμε σε $g(a) = g(\beta)$ και εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την g στο $[a, \beta]$.