

Αν $f' \uparrow \Delta = [a, \beta]$, από τη σχέση (1) έχουμε $\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < f'(\beta)$.

- Για $\Delta = [a, x]$, $x > a$, είναι

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(x) \Leftrightarrow (x - a)f'(x) > f(x) - f(a)$$
- Για $\Delta = [0, x]$, $x > 0$ και $f(0) = 0$, είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) > f(x)$$
- Για $\Delta = [x, 2x]$, $x > 0$, είναι

$$\frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} < f'(2x) \Leftrightarrow xf'(2x) > f(2x) - f(x)$$

Παρατήρηση

Πρόταση
 Για κάθε $x > 0$, ισχύει ότι:

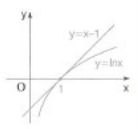
- $\ln x \leq x - 1$, (1)
- $\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$

 Απόδειξη
 ► Αν $x = 1$, τότε προφανώς η (1) ισχύει, ως ισότητα.
 ► Αν $0 < x \neq 1$, θα δείξουμε ότι $\ln x < x - 1$, (2)
 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

- Αν $x > 1$, τότε η (2) $\Leftrightarrow \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < 1$, (3)
 Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[1, x]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
 Οπότε η (3) $\Leftrightarrow \frac{1}{\xi} < 1 \Leftrightarrow \xi > 1$, που ισχύει.
 - Αν $0 < x < 1$, τότε, όμοια αποδεικνύεται η (2).

 Άρα $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 1$. Δηλαδή:

- $\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$ και $\ln x < x - 1$, $0 < x \neq 1$



Βασική ανισότητα: $\ln x \leq x - 1$

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ)
2

Αν ισχύει ή έχουμε αποδείξει μία ανισότητα $f(x) < g(x)$, $x \in \Delta$ και θέλουμε να αποδείξουμε μία άλλη ανισότητα $h(x) < 0$, $x \in \Delta$, (2), τότε γράφουμε το 1^ο μέλος της (2) σαν άθροισμα της $f(x) - g(x)$ και μιας άλλης συνάρτησης $\varphi(x)$ που είναι ή θα αποδεικνύουμε ότι είναι αρνητική στο Δ .
 Δηλαδή η (2) $\Leftrightarrow f(x) - g(x) + \varphi(x) < 0$, με $\varphi(x) < 0$.
 Όμοια η ανισότητα $h(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) - f(x) + \varphi(x) > 0$, με $\varphi(x) > 0$.

Γενικές

Αν θέλουμε να δείξουμε την ύπαρξη $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$, ώστε να ισχύει μια σχέση της μορφής:
 $\kappa_1 f'(\xi_1) + \kappa_2 f'(\xi_2) = \lambda$, (1)
 τότε βρίσκουμε το άθροισμα κ των συντελεστών των $f'(\xi_1)$, $f'(\xi_2)$, δηλαδή $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ και το λόγο $d = \frac{\beta - a}{\kappa}$.
 Στη συνέχεια θεωρούμε σημείο $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\gamma = a + \kappa d$ και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$.
 Αν $\kappa_1 = \kappa_2$, τότε $\gamma = \frac{a + \beta}{2}$, δηλαδή το γ είναι το μέσο του διαστήματος $[a, \beta]$.


Εύρεση διαστημάτων για εφαρμογή του Θ.Μ.Τ

Αν θέλουμε να δείξουμε την ύπαρξη $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$, ώστε να ισχύει μια σχέση
 $g(f(\xi_1), f(\xi_2)) = \kappa$ ή $g(f'(\xi_1), f'(\xi_2)) > 0$,
 τότε χωρίζουμε το διάστημα (a, β) σε δύο υποδιαστήματα $[a, x_0]$, $[x_0, \beta]$, όπου το x_0 μπορεί να προκύψει από το θεώρημα Bolzano ή το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$.

Θ. Bolzano ή Θ.Ε.Τ
και Θ.Μ.Τ