

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) ,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$.

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

Γεωμετρικά η ύπαρξη του $\xi \in (a, \beta)$, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a},$$

σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB , όπου $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

(Είναι $\lambda_c = f'(\xi)$ και $\lambda_{AB} = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$, οπότε $f'(\xi) = \lambda_{AB}$).

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (a, \beta)$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$, ώστε $f'(\xi) = \lambda$. Οπότε εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[a, \beta]$.

Αν οι αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δηλαδή $2\beta = a + \gamma \Leftrightarrow \beta - a = \gamma - \beta$, (1) και οι τιμές $f(a), f(\beta), f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δηλαδή ισχύει

$$f(a) + f(\gamma) = 2f(\beta) \Leftrightarrow f(\beta) - f(a) = f(\gamma) - f(\beta)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

Αν οι αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δηλαδή $2\beta = a + \gamma \Leftrightarrow \beta - a = \gamma - \beta$, (1) και οι τιμές $f(a), f(\beta), f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δηλαδή ισχύει

τότε εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[a, \beta]$, $[\beta, \gamma]$, και προκύπτει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και προκύπτει ότι η f'' έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) .

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)
1

Θ.Μ.Τ και Ανισότητες
Πρόσημο της $f'(\xi) \Rightarrow$ Πρόσημο $f(\beta) - f(a)$

Βασική άσκηση

Αν $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, με $\Delta = [a, \beta]$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη, τότε ισχύουν:

α. Αν $f' \uparrow \Delta$, τότε $f'(a) < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < f'(\beta)$, (1)

β. Αν $f' \downarrow \Delta$, τότε $f'(\beta) < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < f'(a)$, (2)

Απόδειξη

Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$. Οπότε:

α. Η ανισότητα (1) γράφεται ισοδύναμα

$$f'(a) < f'(\xi) < f'(\beta) \stackrel{r1}{\Leftrightarrow} a < \xi < \beta, \text{ που ισχύει.}$$

β. Η ανισότητα (2) γράφεται ισοδύναμα

$$f'(\beta) < f'(\xi) < f'(a) \stackrel{r1}{\Leftrightarrow} \beta < \xi < a, \text{ που ισχύει.}$$

Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[a, \beta]$, τότε ισχύει η ισότητα

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}, \quad \xi \in (a, \beta)$$

Αν επιπλέον ισχύει π.χ. $f'(x) < \kappa, \quad x \in (a, \beta)$, τότε είναι και

$$f'(\xi) < \kappa \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < \kappa \Leftrightarrow f(\beta) - f(a) < \kappa(\beta - a)$$

Οπότε, αν έχουμε $f'(x) < \kappa, \quad x \in (a, \beta)$ και θέλουμε να δείξουμε μία ανισότητα (I) που περιέχει τις τιμές $f(a)$ και $f(\beta)$, τότε μετασχηματίζουμε ισοδύναμα την ανισότητα (I), ώστε να εμφανιστεί ο λόγος μεταβολής $\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$, τον οποίο τον αντικαθιστούμε με την $f'(\xi)$, $\xi \in (a, \beta)$ και καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει.

► Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε ισχύει η ισότητα

$$\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = f'(\xi), \quad \xi \in (a, \beta)$$

- Αν $f(\beta) > f(a)$, τότε $f'(\xi) > 0$.
- Αν $f(\beta) - f(a) > \kappa$, τότε $(\beta - a)f'(\xi) > \kappa$.

► Αν για τις συναρτήσεις f και f' ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα $[a, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$, τότε προκύπτει

$$\frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = f''(\xi), \quad \text{όπου } \xi_1 \in (a, \gamma), \quad \xi_2 \in (\gamma, \beta) \text{ και } \xi \in (\xi_1, \xi_2)$$

Αν $f'(\xi_2) > f'(\xi_1)$, τότε $f''(\xi) > 0$.

Υποθέσεις - Συμπέρασμα

Θ.Μ.Τ - Μονοτονία της f' - Ανισότητες

Υπαρξη ρίζας της f''
με εφαρμογή 2 φορές του Θ.Μ.Τ για την f και του Θ. Rolle για την f'