

► Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο, όπως και ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο (σχ. 1.).

σχ. 1. σχ. 2.

► Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα (σχ. 2.).

• Το μεγαλύτερο, όμως, από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης, δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης, το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης, δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (σχ. 1.).

Σχόλιο στα Τοπικά Ακρότατα

Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

Σχόλιο στο Θεώρημα του Fermat

► Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat,

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.
- Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

► Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία:

- η f δεν παραγωγίζεται ή
- η f' είναι ίση με το μηδέν

λέγονται **κρίσιμα** σημεία της f στο διάστημα Δ .

Πλήθος ακροτάτων

Αν έχουμε μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα Δ και θέλουμε να δείξουμε ότι αυτή δεν έχει ακρότατα, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

Πλήθος Ακροτάτων

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

Θεώρημα

Παρατηρήσεις

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο ανοιχτό διάστημα Δ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- Αν η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0) = 0$.
- Αν $x_0 \in \Delta$ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .
- Αν για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) \neq 0$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.
- Αν $x_0 \in \Delta$ και $f'(x_0) = 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει υποχρεωτικά ακρότατο στο x_0 .
- Αν $x_0 \in \Delta$, τότε δεν είναι ισοδύναμες οι προτάσεις:
«Η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 » και
«Η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ ».

$f(x) = x^3 + 1$

Ανισοσύνητα $\rightarrow$ Fermat $\rightarrow$ Ισότητα

Όταν δίνεται ότι ισχύει μια ανισότητα της μορφής: $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και έχουμε:
$$f(x) - g(x) \leq 0, \quad x \in \Delta$$
- Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \Delta$, οπότε $h(x) \leq 0$, $x \in \Delta$.
- Βρίσκουμε σημείο x_0 για το οποίο ισχύει $h(x_0) = 0$, οπότε έχουμε:
$$h(x) \leq h(x_0), \quad x \in \Delta$$
- Άρα η h έχει μέγιστο στο x_0 και, αν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat έχουμε:
$$h'(x_0) = 0.$$

Ανισοσύνητα - Fermat - Ισότητα

Εύρεση Μεγίστου - Ελαχίστου - Συνόλου Τιμών

Εύρεση Μεγίστου - Ελαχίστου - Συνόλου Τιμών

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής παρουσιάζει μέγιστο M και ελάχιστο m και έχει σύνολο τιμών το $[m, M]$.

Για την εύρεση του μεγίστου και ελαχίστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f .