

Θεώρημα του Bolzano

Έστω μία συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(a) \cdot f(b) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = 0$$

- Δηλαδή, υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, b) .
- Δηλαδή, υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της συνάρτησης f στο ανοικτό διάστημα (a, b) .

► Έστω ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) διαδοχικές ρίζες μίας συνεχούς συνάρτησης f και $a \in (\rho_1, \rho_2)$.

- Αν $f(a) > 0$, τότε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

x	ρ_1	a	ρ_2
$f(x)$	0	+	0

- Αν $f(a) < 0$, τότε $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

x	ρ_1	a	ρ_2
$f(x)$	0	-	0

Άρα μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

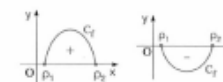
Πρόσημο συνάρτησης μεταξύ διαδοχικών ριζών

[Δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) μίας συνάρτησης f είναι διαδοχικές, όταν δεν υπάρχει άλλη ρίζα της f μεταξύ αυτών.

Δηλαδή, $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$].

► Αν ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) διαδοχικές ρίζες μίας συνεχούς συνάρτησης f , τότε

- ή $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$



- ή $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$

Πρόσημο μεταξύ διαδοχικών ριζών

Πρόσημο μεταξύ διαδοχικών ριζών

Πρόσημο

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Παρατηρήσεις

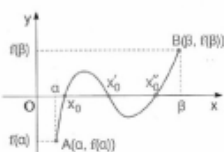
Πρόσημο

Θεώρημα

Γεωμετρική Ερμηνεία

Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Bolzano

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και τα σημεία $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x' , τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x' σ' ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, b)$.



Παρατηρήσεις

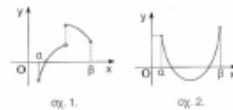
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ισχύει $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

- Το αντίστροφο του θεωρήματος του Bolzano δεν ισχύει πάντοτε.

Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει ρίζα στο (a, b) ,

αλλά:

- δεν είναι συνεχής στο $[a, b]$ (σχ. 1.) ή
- δεν ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$ (σχ. 2.)

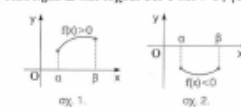


- Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δεν έχουμε ως συμπέρασμα, ότι η f δεν έχει ρίζα στο (a, b) .

Πρόσημο συνάρτησης

- Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε:

- ή $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$ (σχ. 1.)



- ή $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$ (σχ. 2.)