

Για να βρούμε τα διαστήματα μονοτονίας μιας συνάρτησης f :

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και την f' .
- Αν δεν υπάρχει η f' σε κάποιο $x_0 \in D_f$ ή η f αλλάζει τύπο στο $x_0 \in D_f$, εξετάζουμε την f ως προς τη συνέχεια στο x_0 .
- Βρίσκουμε τις ρίζες της f' και κατασκευάζουμε τον πίνακα προσημίων της, από τον οποίο έχουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Εύρεση διαστημάτων Μονοτονίας
με χρήση παραγώγων

Μετασχηματισμός εξίσωσης - ανίσωσης

Αν θέλουμε να λύσουμε μία εξίσωση $f(x) = g(x)$, (1) ή την ανίσωση $f(x) > g(x)$ στο σύνολο A , τότε μπορούμε να την μετασχηματίσουμε ισοδύναμα με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και βρίσκουμε τις ρίζες της.
- Αν $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$, τότε η (1) $\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$, της οποίας βρίσκουμε τις ρίζες ή το πρόσημό της.
- Αν $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, για κάθε $x \in A$, τότε η (1) $\Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln f(x) - \ln g(x)$, της οποίας βρίσκουμε τις ρίζες ή το πρόσημό της.

Αν θέλουμε να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής:

$$ka^x + lb^x = mg^x \quad (1)$$

με $0 < a < b < \gamma$, τότε βρίσκουμε την προφανή ρίζα και διαιρούμε όλους τους όρους με το γ^x , οπότε η (1) $\Leftrightarrow k\left(\frac{a}{\gamma}\right)^x + l\left(\frac{b}{\gamma}\right)^x - m = 0 \quad (2)$

Επειδή η συνάρτηση του πρώτου μέλους της (2) είναι γνησίως φθίνουσα, η (1) έχει ρίζα μόνο την προφανή.

Εξισώσεις - Ανισώσεις
Ειδικής μορφής

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και έχει προφανή ρίζα το x_0 , τότε:

- το x_0 είναι μοναδική ρίζα της f και για:
- $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) = 0$
- $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) = 0$

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε, όταν $f \downarrow \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f		$-$	$+$

Μετασχηματισμός Εξίσωσης - Ανίσωσης

Επίλυση Εξισώσεων και ανισώσεων
με τη βοηθητική συνάρτηση
 $F(x) = f(x+c) - f(x)$

Ρίζες
Πρόσημο Συνάρτησης

MONOTONIA ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Επίλυση Εξισώσεων και ανισώσεων
Σύνθετων Συναρτήσεων

Επίλυση Εξισώσεων και Ανισώσεων

Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f' \uparrow \Delta$ και η συνάρτηση $F(x) = f(x+c) - f(x)$, $x \in \Delta$ και $c > 0$

Είναι:

- $F'(x) = f'(x+c) - f'(x)$, $x \in \Delta$.
- $x+c > x \Rightarrow f'(x+c) > f'(x) \Rightarrow F'(x) > 0$, $x \in \Delta$, οπότε $F \uparrow \Delta$.

Τη συνάρτηση F την χρησιμοποιούμε για την επίλυση εξισώσεων της μορφής:

- $f(x+c) - f(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0$
- $f(g(x)+c) - f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow F(g(x)) = 0$
- $f(g_1(x)+c) - f(g_1(x)) = f(g_2(x)+c) - f(g_2(x)) \Leftrightarrow F(g_1(x)) = F(g_2(x))$

Όμοια λύνονται και ανισώσεις της παραπάνω μορφής.

Εύρεση μονοτονίας της f με βοηθητική συνάρτηση

Σχόλιο Αν θέλουμε να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f και έχουμε:

$$f'(x) = h(x) \cdot g(x) \quad \text{ή} \quad f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

και η h διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε βρίσκουμε το πρόσημο της g , άρα και της f'

Αν θέλουμε να λύσουμε μια εξίσωση $f(x) = 0$ ή μια ανίσωση $f(x) > 0$ στο Δ , η οποία δεν λύνεται με γνωστές μεθόδους και η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο Δ , τότε βρίσκουμε την προφανή ρίζα x_0 της f στο Δ και έχουμε:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$, (αφού η f είναι 1-1)
- Αν $f \uparrow \Delta$, τότε:
 - $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$ και $x \in \Delta$
 - $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow x < x_0$ και $x \in \Delta$
- Αν $f \downarrow \Delta$, τότε:
 - $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$ και $x \in \Delta$
 - $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow x < x_0$ και $x \in \Delta$

Για τη λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$ ή της ανίσωσης $h(x) > 0$ στο Δ , εξετάζουμε μήπως αυτές παίρνουν τις μορφές:

- $f(g(x)) = 0$ ή $f(g(x)) > 0$ αντίστοιχα, με f γνησίως μονότονη και προφανή ρίζα x_0 , οπότε έχουμε:
 - $f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(x_0) \Leftrightarrow g(x) = x_0$, (αφού $f: 1-1$)
 - Αν $\pi_{x_0} \uparrow \Delta$, τότε, $f(g(x)) > 0 \Leftrightarrow f(g(x)) > f(x_0) \Leftrightarrow g(x) > x_0$
- $f(g_1(x)) = f(g_2(x))$ ή $f(g_1(x)) > f(g_2(x))$ αντίστοιχα, με f γνησίως μονότονη, οπότε έχουμε:
 - $f(g_1(x)) = f(g_2(x)) \Leftrightarrow g_1(x) = g_2(x)$, (αφού $f: 1-1$)
 - Αν $\pi_{x_0} \uparrow \Delta$, τότε έχουμε $f(g_1(x)) > f(g_2(x)) \Leftrightarrow g_1(x) > g_2(x)$.