

Γνωρίζουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία:
 $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x, \quad x \in \Delta$

$2f(x) \cdot f'(x) = g(x) \Leftrightarrow (f^2(x))' = G'(x) \Leftrightarrow f^2(x) = G(x)$

Αν δίνεται μία ισότητα και περιέχει τις συναρτήσεις:
 $f(x) + g(x)$ και $f'(x) + g'(x)$ ή $f''(x) + g''(x)$,
όπου $g(x)$ γνωστή συνάρτηση, τότε θέτουμε
 $h(x) = f(x) + g(x) \quad (1)$
και βρίσκουμε την $h(x)$. Στη συνέχεια από την (1) βρίσκουμε την f .

Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $(x^2 + 1)f''(x) = 2(1 - xf'(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε
 $(x^2 + 1)f''(x) = 2(1 - xf'(x)) \Leftrightarrow (x^2 + 1)f''(x) = 2 - 2xf'(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2xf'(x) + (x^2 + 1)f''(x) = 2 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f'(x) + (x^2 + 1)(f'(x))' = 2$
 $\Leftrightarrow ((x^2 + 1)f'(x))' = (2x)' \Leftrightarrow (x^2 + 1)f'(x) = 2x + c_1 \quad (1)$
Για $x = 0$, έχουμε $f'(0) = c_1 \Leftrightarrow 0 = c_1$. Οπότε η (1) γίνεται
 $(x^2 + 1)f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1}$
 $\Leftrightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' \Leftrightarrow f(x) = \ln(x^2 + 1) + c_2$
Για $x = 0$, έχουμε $f(0) = \ln 1 + c_2 \Leftrightarrow 0 = c_2$. Άρα $f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}$.

Μορφή: $f'(x) = f(x)$

Μορφή: $2f(x) \cdot f'(x) = g(x)$

Εύρεση της f με βοηθητική συνάρτηση

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ - Σταθερή συνάρτηση 2

Εύρεση της f κατά διαστήματα

Εύρεση τιμής της f

Σχέσεις με $f'(x)$

Σχέσεις με $f(x)$ και $g(x)$ ή $f(x) = a \cdot g(x)$

Αν Δ_1, Δ_2 διαστήματα με $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ και έχουμε:
 $f'(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$
Τότε γράφουμε:
• Αν $x \in \Delta_1$, τότε $f(x) = g(x) + c_1$
ή $f(x) = \begin{cases} g(x) + c_1, & x \in \Delta_1 \\ g(x) + c_2, & x \in \Delta_2 \end{cases}$
• Αν $x \in \Delta_2$, τότε $f(x) = g(x) + c_2$

Έστω ότι έχουμε μια σχέση της μορφής $f'(g(x)) = h(x)$, (1)
(όπου g, h : γνωστές συναρτήσεις)
• Αν η g είναι 1-1 θέτουμε $g(x) = y$, την οποία λύνουμε ως προς x , οπότε μετά τις αντικαταστάσεις καταλήγουμε στη σχέση $f'(x) = \varphi(x)$ και βρίσκουμε την f .
• Αν θέλουμε να βρούμε μία τιμή της f και η $g(x) = y$, δεν λύνεται ως προς y , τότε πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με την $g'(x)$ και έχουμε:
 $f'(g(x))g'(x) = g'(x)h(x) \Leftrightarrow (f(g(x)))' = \varphi'(x) \Leftrightarrow f(g(x)) = \varphi(x) + c$

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x) = a g(x), \quad x \in \Delta$, θεωρούμε τη συνάρτηση:
• $\varphi(x) = f(x) - a g(x), \quad x \in \Delta$ και αποδεικνύουμε ότι είναι μηδενική.
• $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0, x \in \Delta$ και αποδεικνύουμε ότι είναι σταθερή με τιμή a .