Συνέπειες του Θ.Μ.Τ - Σταθερή συνάρτηση 1

ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **$f'(x) = 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι,

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της (1) είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Άρα, σε όλες τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Πόρισμα

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **$f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,**

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$, ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Άρα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ.

Επομένως, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

$$f(x) - g(x) = c, \text{ οπότε } f(x) = g(x) + c$$

Σταθερή συνάρτηση

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι σταθερή σε ένα διάστημα:

- $\Delta = (\alpha, \beta)$, τότε αποδεικνύουμε ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \Delta$
- $\Delta = [\alpha, \beta]$, τότε αποδεικνύουμε ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Αν, επιπλέον, θέλουμε να βρούμε την f, αφού αυτή είναι σταθερή, αρκεί να βρούμε μια τιμή της.

Εύρεση της f από κανόνες παραγώγισης

Αν έχουμε μία ισότητα που περιέχει την $f'(x)$ και θέλουμε να βρούμε την f, τότε μετασχηματίζουμε την ισότητα αυτή στη μορφή

$$g'(x) = h'(x), \quad x \in \Delta, \quad (1) \quad (\Delta\text{: διάστημα})$$

Οπότε $g(x) = h(x) + c$, $x \in \Delta$, (2) από την οποία προκύπτει η f.

► Οι μετασχηματισμοί που κάνουμε συνήθως, ώστε να έρθει στη μορφή (1) είναι:

- Μεταφορά όρων από το ένα μέλος στο άλλο.
- Αν υπάρχουν οι f και f' σε διαφορετικά μέλη πρέπει να τις φέρουμε "κατάλληλα" στο ίδιο μέλος.
- Απαλοιφή παρονομαστών.
- Διαίρεση ή πολλαπλασιασμό με κατάλληλη συνάρτηση.

► Τη σταθερά c τη βρίσκουμε από τη σχέση (2) και μία τιμή της f που θα δίνεται, ή όταν έχουμε την περίπτωση $\varphi(x)f(x) = h(x) + c$, (3) και η φ είναι γνωστή, θα δίνουμε μία τιμή στο x που θα μηδενίζει τη $\varphi(x)$.

Εύρεση της f όταν f ' (x) + g(x).f(x) = h(x)

Αν έχουμε μία ισότητα της μορφής:

$$\mathbf{f'(x) + g(x)f(x) = h(x)}, \quad (1), \text{ τότε:}$$

- Βρίσκουμε μία αρχική $G(x)$ της $g(x)$ και η (1) γράφεται

$$\mathbf{f'(x) + G'(x)f(x) = h(x)} \qquad (2)$$

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (2) με $e^{G(x)}$ και έχουμε:

$$e^{G(x)}f'(x) + e^{G(x)}G'(x)f(x) = e^{G(x)}h(x) \Leftrightarrow \left(e^{G(x)}f(x)\right)' = e^{G(x)}h(x)$$

Ειδικά, αν έχουμε:

- $\mathbf{xf'(x) + 2f(x) = g(x)}$, τότε πολλαπλασιάζουμε με x
- $\mathbf{xf'(x) + 3f(x) = g(x)}$, τότε πολλαπλασιάζουμε με x^2

Εύρεση της f από παράγουσες βασικών συναρτήσεων

Αν θέλουμε να βρούμε τον τύπο μιας συνάρτησης f, για την οποία ισχύει

$$\mathbf{f'(x) = g(x)}, \quad x \in \Delta \qquad (\text{όπου } g \text{ γνωστή συνάρτηση}),$$

βρίσκουμε μια παράγουσα G της g στο διάστημα Δ, οπότε

$$f'(x) = G'(x), \quad x \in \Delta \quad \text{και έχουμε} \quad f(x) = G(x) + c, \quad x \in \Delta$$